

ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2 - НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ

1. ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА (17)

1. Интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ написати као интеграл рационалне функције.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^2} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \quad (\text{фебруар 2019.})$$

2. Заокружити слова испред примитивних функција функције $f(x) = \sin x + \cos x$ на интервалу $(-\infty, +\infty)$:

a) $F(x) = \cos x - \sin x$; б) $F(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2$; в) $F(x) = \sin x - \cos x$; г) $F(x) = 2 - \cos x + \sin x$;

д) ниједна од претходних функција није примитивна функција функције f на интервалу $(-\infty, +\infty)$.

(октобар 2018.)

3. Заокружити слова испред примитивних функција функције $f(x) = 2e^{3x} + 5$ на интервалу $(-\infty, +\infty)$:

a) $F(x) = 2e^{3x} + 5$; б) $F(x) = 6e^{3x}$; в) $F(x) = 6e^{3x} + 2$; г) $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + 5x$; д) $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + 5x + 5$;

ђ) ниједна од претходних функција није примитивна функција функције f на интервалу $(-\infty, +\infty)$.

(септембар 2018.)

4. Нека је F примитивна функција функције f на интервалу (a, b) . Заокружити слова испред тачних одговора:

a) $F + 2$ је примитивна функција функције f на интервалу (a, b) ;

б) $(\forall x \in (a, b)) F'(x) = f(x)$;

в) $(\forall x \in (a, b)) f'(x) = F(x)$;

г) $\int f(x) dx = F(x) + C, x \in (a, b), C \in \mathbb{R}$;

д) $\int F(x) dx = f(x) + C, x \in (a, b), C \in \mathbb{R}$;

ђ) ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

(јул 2018.)

5. Одредити интеграл $\int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2 + 2} dx \left(= \frac{1}{4} \ln((x^2 - 1)^2 + 1) + C \right)$.

(јун 2018.)

6. Одредити интеграл $\int (x + 4)4^{4x} dx \left(= \frac{x + 4}{4 \ln 4} 4^{4x} - \frac{1}{(4 \ln 4)^2} 4^{4x} + C \right)$.

(фебруар 2018.)

7. Одредити интеграл $\int \frac{\log_x 5}{x} dx \left(= \ln 5 \ln |\ln x| + C \right)$.

(октобар 2017.)

8. Одредити интеграл $\int \operatorname{ctg}(e \cdot x) dx \left(= \frac{1}{e} \ln |\sin(e \cdot x)| + C \right)$.

(септембар 2017.)

9. Заокружити слова испред примитивних функција функције $f(x) = \sin(2x)$ на интервалу $(-\infty, +\infty)$:

a) $F(x) = -\frac{\cos(2x)}{2}$; б) $F(x) = -2 - \frac{\cos(2x)}{2}$; в) $F(x) = -\cos(2x)$; г) $F(x) = 2 \cos(2x)$;

д) ниједна од претходних функција није примитивна функција функције f на интервалу $(-\infty, +\infty)$. (јул 2017.)

10. Одредити интеграл $\int (5^x - \sqrt{2-3x}) dx \left(= \frac{1}{\ln 5} 5^x + \frac{2}{9} (2-3x)^{\frac{3}{2}} + C \right)$. (јун 2017.)

11. Нека је F примитивна функција функције f на интервалу (a, b) . Заокружити слова испред тачних одговора:

а) $F + 2$ је примитивна функција функције f на интервалу (a, b) ;

б) $(\forall x \in (a, b)) F'(x) = f(x)$;

в) $(\forall x \in (a, b)) f'(x) = F(x)$;

з) $\int f(x) dx = F(x) + C, x \in (a, b), C \in \mathbb{R}$;

д) $\int F(x) dx = f(x) + C, x \in (a, b), C \in \mathbb{R}$;

ђ) ниједан од претходно понуђених одговора није тачан.

(фебруар 2017.)

12. Одредити интеграл $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} (= \arctg e^x + C)$.

(октобар 2016.)

13. Дат је интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)} (= 6\sqrt[6]{x} - 6\arctg \sqrt[6]{x} + C)$.

а) Којом сменом се тај интеграл своди на интеграл рационалне функције? $t = \sqrt[6]{x}, dt = \frac{1}{6\sqrt[6]{t^5}}$

б) Навести на тај начин добијени интеграл. $I = \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1}$.

(септембар 2016.)

14. Одредити интеграл $\int \frac{dx}{2x^2 + x + 1} \left(= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C \right)$.

(јул 2016.)

15. Одредити интеграл $\int (2x-2)\sqrt[7]{8-2x+x^2} dx \left(= \frac{7}{8} (8-2x+x^2)^{\frac{8}{7}} + C \right)$.

(јун 2016.)

16. Одредити интеграл $\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx \left(= -2\arctg \sqrt{1-x} + C \right)$.

(фебруар 2016.)

17. Заокружити слова испред примитивних функција функције $f(x) = \sqrt{2x-3}$ на интервалу $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$:

а) $F(x) = \sqrt{2x-3}$; б) $F(x) = \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}}$; в) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$; з) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + 3$;

д) ниједна од претходних функција није примитивна функција функције f на интервалу $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

(јануар 2016.)

2. ИСПИТНИ ЗАДАЦИ (24)

1. [7] Одредити интеграл $\int \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} dx \left(= -\ln \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right| + C \right)$. (јануар 2009.)

2. [4] Одредити интеграл $\int \cos^2(3x) \sin^4(3x) dx \left(= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin(12x)}{12} - \frac{\sin^3(6x)}{9} \right) + C \right)$. (септембар 2018.)

3. [9] Одредити интеграл $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx \left(= e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) + \operatorname{arctg} x + C \right)$. (јун 2009.)

4. [8] Одредити примитивну функцију F функције $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ за коју је $F(0) = 0$.

$$F(x) = \ln \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right) \quad \text{(јануар 2011.)}$$

5. [6] Одредити интеграл $\int \frac{2^x}{1-4^x} dx \left(= \frac{1}{2 \ln 2} \ln \left| \frac{2^x + 1}{2^x - 1} \right| + C \right)$. (април 2010.)

6. [9] Одредити интеграл $\int x \ln \frac{x+1}{x-1} dx \left(= x + \frac{x^2 - 1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C \right)$. (јун 2010.)

7. [8] Одредити интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1} dx \left(= 2\sqrt{x} \ln \frac{x+1}{x-1} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C \right)$. (јун 2013.)

8. [8] Одредити интеграл $\int \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) dx \left(= x \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \right| - \frac{1}{2} \sqrt{x(x+1)} + C \right)$. (септембар 2012.)

9. [6] Одредити интеграл $\int \cos(\ln x) dx \left(= \frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C \right)$. (фебруар 2007.)

10. [10] Одредити интеграл $\int \frac{x e^{\operatorname{arcsin} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \left(= \frac{1}{2} (x - \sqrt{1-x^2}) e^{\operatorname{arcsin} x} + C \right)$. (јун 2008.)

11. [10] Одредити интеграл $\int \frac{\operatorname{arcsin} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \left(= \ln \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsin} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \right)$. (октобар 2009.)

12. [9] Одредити интеграл $\int \operatorname{arcsin} x \operatorname{arccos} x dx \left(= x \operatorname{arcsin} x \operatorname{arccos} x + \sqrt{1-x^2} (\operatorname{arccos} x - \operatorname{arcsin} x) + 2x + C \right)$. (јун 2017.)

13. [6] Одредити интеграл $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx \left(= \frac{e^x}{1+x} + C \right)$. (април 2011.)

14. [12] Одредити примитивну функцију F функције $f(x) = \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}$.

$$F(x) = \frac{-x \cos x + \sin x}{x \sin x + \cos x} + C \quad \text{(јул 2012.)}$$

15. [8] а) Одредити рекурентну формулу за интеграл $I_n = \int (a^2 - x^2)^n dx, n \in \mathbb{N}, a > 0$.

$$I_n = \frac{x}{2n+1}(a^2 - x^2)^n + \frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}$$

б) Одредити интеграл $I_{\frac{1}{2}} = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \left(= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \right)$. (јануар 2014.)

16. [10] а) Одредити рекурентну формулу за интеграл $I_n = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(a^2 + b^2)} \left(nI_n + \frac{-a \cos x + b \sin x}{(a \sin x + b \cos x)^{n+1}} \right)$$

б) Одредити интеграл $I_2 \left(= -\frac{1}{a} \frac{1}{a \operatorname{tg} x + b} + C \right)$. (септембар 2017.)

17. [9] Чему је једнак реалан број m ако се зна да је интеграл $\int \frac{x^2 + mx - 5}{x^3(x-1)^2} dx$ рационална функција?

$$m = 7$$

(фебруар 2011.)

18. [10] Чему су једнаки реални бројеви m, n и k ако се зна да је интеграл $\int \frac{5x^5 - 3x^4 + nx^3 + kx^2 + mx + 1}{x^3(x-1)^2(1+x^2)} dx$

рационална функција? $n = 5, k = -2, m = 0$

(фебруар 2015.)

19. [8] Одредити интеграле:

а) $\int x^2 \left(e^{x^3} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}(1+\sqrt[6]{x})} \right) dx \left(= \frac{1}{3} e^{x^3} + 12\sqrt[12]{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x} + C \right)$;

б) $\int \frac{dx}{3 - 5 \sin^2 x + 7 \cos^2 x} \left(= -\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right| + C \right)$. (јул 2016.)

20. [7] Одредити интеграл $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx \left(= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}} + C \right)$. (април 2012.)

21. [9] Одредити интеграл $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} dx \left(= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x} \right| - \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C \right)$. (април 2013.)

22. [7] Одредити интеграл $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx \left(= 2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| - 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C \right)$. (април 2009.)

23. [5] Одредити интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx \left(= \frac{3}{5} \sqrt{\left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^5} - 2 \sqrt{\left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^3} + 3 \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}} + C \right)$. (фебруар 2012.)

24. [10] Одредити интеграл $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x \sqrt{6 \sin^2 x - 1}} dx \left(= \frac{\sqrt{5 - 6 \cos^2 x}}{5 \cos x} + C \right)$. (септембар 2009.)