ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2 - *материјали за 16.3.2020.*

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Данијела Бранковић, danijela@etf.rs

1. ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА (20)

1. Одредити решење диференцијалне једначине $y - xy' = 2$, које задовољава услов $y(1) = 2$.

$\left(y(x) = 2\right)$ ***(фебруар 2019.)***

2. Наћи решење диференцијалне једначине $y' + 2xy = 4x$, које задовољава услов $y(0) = 1$.

$\left(y(x) = 2 - \mathrm{e}^{-x^2}\right)$ ***(октобар 2018.)***

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $x\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y = 0$ и одредити ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,0)$.

$\left(\text{опште решење: } \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + y = c,\ c \in \mathbb{R};\quad \text{интегрална крива: } \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + y = 0\right)$ ***(септембар 2018.)***

4. Написати једну диференцијалну једначину вишег реда чија су партикуларна решења $y_1 = 1$ и $y_2 = x$.

$\left(y'' = 0\right)$ ***(септембар 2018.)***

5. Написати хомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда чија су два линеарно независна партикуларна решења $y_{p1} = \mathrm{e}^{2x}\sin x$ и $y_{p2} = \mathrm{e}^{2x}\cos x$.

$\left(y'' - 4y' + 5y = 0\right)$ ***(јул 2018.)***

6. Заокружити слова поред линеарних диференцијалних једначина првог реда:

а) $xy' + xy = x$;

б) $y' + y^2 + 3x = 0$;

в) $xy + 7y' = x$;

г) $\sin x + 2x = y'$;

д) ниједан од претходно понуђених одговора није тачан. ***(јул 2018.)***

7. Наћи решење диференцијалне једначине $y' + 2xy - 2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, које задовољава услов $y(0) = 1$.

$\left(y(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(1 + x^2\right)\right)$ ***(јун 2018.)***

8. Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y'' + 2\sqrt{3}y' + 5y = 0$.

$\left(y(x) = c_1\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}\sin\left(\sqrt{2}x\right),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right)$ ***(фебруар 2018.)***

9. Одредити тип (*раздваја променљиве, хомогена, линеарна, Бернулијева, Рикатијева*) за сваку од следећих диференцијалних једначина првог реда.

а) $y' + e^x y = e^{-x^2}$; (линеарна диференцијална једначина)

б) $x^2 y' - \cos 2y = 1$; (диференцијална једначина која раздваја променљиве)

в) $x\left(y' - y^2\right) = y\sin x + \cos x$; (Рикатијева диференцијална једначина)

г) $x\left(y' - y\ln x\right) = y^2 \arcsin x + x^2$. (Рикатијева диференцијална једначина) ***(октобар 2017.)***

10. Написати хомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда чија су два линеарно независна партикуларна решења $y_{p1}=\mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}\sin\left(x\sqrt{2}\right)$ и $y_{p2}=\mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}\cos\left(x\sqrt{2}\right)$.

$\left(y''+2\sqrt{3}y'+5y=0\right)$ ***(октобар 2017.)***

11. Одредити тип (*раздваја променљиве, хомогена, линеарна, Бернулијева, Рикатијева*) за сваку од следећих обичних линеарних диференцијалних једначина првог реда.

а) $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$; (хомогена диференцијална једначина)

б) $y'(1-\sin x\cos x)+y^2\cos x-y+\sin x=0$; (Рикатијева диференцијална једначина)

в) $x\left(1-x^2\right)y'+\left(2x^2-1\right)y-x^3y^3=0$. (Бернулијева диференцијална једначина)

(септембар 2017.)

12. Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y''-4y'+8y=0$.

$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^{2x}\cos(2x)+c_2\mathrm{e}^{2x}\sin(2x),\, c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$ ***(септембар 2017.)***

13. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y'+\dfrac{1}{xy}=0$.

$\left(\dfrac{y^2}{2}+\ln|x|=c,\, c\in\mathbb{R}\right)$ ***(јул 2017.)***

14. Заокружити слова испред хомогених линеарних диференцијалних једначина другог реда:

а) $y'+2y=0$;

б) $y''=x^2y$;

в) $y=y''-y'+3$;

г) $y=y''-x$;

д) $y-y''=y'+2y$;

ђ) ниједан од претходно понуђених одговора није тачан. ***(јул 2017.)***

15. Заокружити слова испред линеарних диференцијалних једначина првог реда:

а) $y'=2xy+y^2$;

б) $y^2y'+\cos x=0$;

в) $8y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\mathrm{e}^x$;

г) $y+2xy'-3x^2y''=0$;

д) $y'=y\ln x+\mathrm{ctg}\,x$;

ђ) ниједна од претходно понуђених једначина није линеарна диференцијална једначина првог реда.

(јун 2017.)

16. Одредити опште решење диференцијалне једначине петог реда $y^{(5)}=0$.

$\left(y(x)=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5x^4,\, c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\in\mathbb{R}\right)$ ***(јун 2017.)***

17. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $xy'=x+y$, које задовољава услов $y(1)=0$.

$\left(y(x)=x\ln|x|\right)$ ***(фебруар 2017.)***

18. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'''-3y''+4y'-2y=0$.

$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^x\cos x+c_3\mathrm{e}^x\sin x, c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\right)$ ***(фебруар 2017.)***

19. Одредити интегралну криву диференцијалне једначине $y'+2xy=4x$ која пролази кроз тачку $A(0,3)$.

$\left(y(x)=2+\mathrm{e}^{-x^2}\right)$ ***(октобар 2016.)***

20. Заокружити слова испред тврђења која важе за диференцијалну једначину $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$:

а) дата једначина је Бернулијева диференцијална једначина;

б) дата једначина је Рикатијева диференцијална једначина;

в) ако је $P\equiv 0$, дата једначина је линеарна диференцијална једначина;

г) ако је $R\equiv 0$, дата једначина је линеарна диференцијална једначина;

д) ниједно од претходно понуђених тврђења не важи. ***(октобар 2016.)***

2. ИСПИТНИ ЗАДАЦИ (21)

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине $xy'=x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}+y$.

$\left(\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}+\ln|x|=c, c\in\mathbb{R}\right)$ ***(септембар 2008.)***

2. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$, а затим одредити ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,1)$.

$\left(\text{опште решење: } y=\left(\mathrm{e}^{-x^2}(c+2x)\right)^{-1/2}, c\in\mathbb{R};\quad \text{интегрална крива: } y=\left(\mathrm{e}^{-x^2}(1+2x)\right)^{-1/2}\right)$ ***(септембар 2012.)***

3. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'(x^2y^3+xy)=1$. Затим наћи ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(1,0)$.

$\left(\text{опште решење: } x=\left(c\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2\right)^{-1}, c\in\mathbb{R};\quad \text{интегрална крива: } y=\left(-\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2\right)^{-1}\right)$ ***(септембар 2013.)***

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y''-2y'-3y=xe^{2x}$.

$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)\mathrm{e}^{2x}, c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$ ***(септембар 2014.)***

5. Решити диференцијалну једначину $y''-3y'+2y=e^{3x}+e^x+x^2$.

$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{\mathrm{e}^{3x}}{2}-x\mathrm{e}^x+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}, c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$ ***(септембар 2013.)***

6. Одредити ону интегралну криву диференцијалне једначине другог реда $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x+8\mathrm{e}^{2x}$ која пролази кроз координатни почетак под углом од $\pi/4$ према $y-$оси.

$\left(y(x)=\mathrm{e}^x\left(x-\frac{8}{3}\right)+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{2x}\right)$ ***(фебруар 2014.)***

7. Дата је диференцијална једначина $y''+y'+y=\cos x$.

(а) Одредити њено опште решење. $\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\sin x, c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$

(б) Одредити оно партикуларно решење које задовољава почетне услове: $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

$\left(y(x)=\sin x\right)$ ***(новембар 2008.)***

8. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

$$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x\left(x-\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right)-1+\mathrm{e}^{-x}\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right),c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$$ ***(јун 2012.)***

9. У диференцијалној једначини $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ увести смену $y(x)=a(x)\cdot z(x)$, $a(x)\neq 0$, тако да се анулира коефицијент уз z', а затим одредити опште решење полазне диференцијалне једначине.

$$\left(y(x)=\frac{c_1\cos x+c_2\sin x}{x},c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$$ ***(фебруар 2012.)***

10. **[8]** Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'(1-\sin x\cos x)+y^2\cos x-y+\sin x=0,$ ако је познато да је једно партикуларно решење $y_1=\cos x.$

$$\left(y(x)=\frac{2-\sin(2x)}{c+2\sin x}+\cos x,c\in\mathbb{R}\right)$$ ***(јануар 2019.)***

11. **[8]** У зависности од реалног параметра $a,$ одредити опште решење диференцијалне једначине $y''-a^2y=e^x.$ $\left(a=0\Rightarrow y(x)=c_1+c_2x+\mathrm{e}^x,c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$

$$\left(a\in\{-1,1\}\Rightarrow y(x)=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^x+\frac{x}{2}\mathrm{e}^x,c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$$

$$\left(a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}\Rightarrow y(x)=c_1\mathrm{e}^{-ax}+c_2\mathrm{e}^{ax}+\frac{\mathrm{e}^x}{1-a^2},c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$$ ***(октобар 2018.)***

12. **[9]** Одредити опште решење диференцијалне једначине $(3y-7x+7)\mathrm{d}x-(3x-7y-3)\mathrm{d}y=0.$

$$\left((y-x+1)^2(y+x-1)^5=c,c\in\mathbb{R}\right)$$ ***(септембар 2018.)***

13. **[9]** Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''+2y'+y=(x+2)\ln x+2+\dfrac{1}{x}.$

$$\left(y(x)=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2x\mathrm{e}^{-x}+x\ln x,c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$$ ***(јун 2018.)***

14. **[8]** У зависности од параметра $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$ одредити опште решење диференцијалне једначине $y^{(4)}+2y''+y=\cos ax.$ $\left(y(x)=c_1\cos x+c_2x\cos x+c_3\sin x+c_4x\sin x-\dfrac{1}{8}x^2\cos x,c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}\right)$ ***(јун 2018.)***

15. **[5+4]** Дата је диференцијална једначина $x^2y''+2x(x+2)y'+2\left(2x+1+\dfrac{x^2}{2}\right)y=0$.

а) Одредити вредност реалног параметра α за коју се дата диференцијална једначина увођењем смене $y=x^\alpha u$ своди на диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима по непознатој зависно промењљивој функцији $u=u(x)$. $(\alpha=-2)$

б) Наћи партикуларно решење y_p дате диференцијалне једначине тако да график функције $f(x)=y_p\mathrm{e}^xx^3$ буде парабола чије је теме тачка $(-1,-1)$. $\left(y_p(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}(c_1+c_2x),c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$ ***(фебруар 2018.)***

16. **[9]** Методом варијације константи одредити партикуларно решење y_p линеарне диференцијалне једначине другог реда $y''-6y'+9y=\dfrac{3\mathrm{e}^{3x}}{x^2}$, која се добија из општег за нулте вредности неодређених константи. $\left(y_p(x)=-3\mathrm{e}^{3x}(\ln|x|+1)\right)$ ***(октобар 2017.)***

17. **[5+3]** Дата је диференцијална једначина $(x^2y^2-1)\mathrm{d}y+2xy^3\mathrm{d}x=0$.

а) Одредити вредност константе $\alpha\in\mathbb{R}$ тако да се дата диференцијална једначина увођењем смене $y=z^\alpha$ своди на хомогену диференцијалну једначину по непознатој функцији $z=z(x)$. $(\alpha=-1)$

б) Одредити опште решење тако добијене диференцијалне једначине по непознатој функцији $z=z(x)$. $\left(\dfrac{z}{z^2+x^2}=c,c\in\mathbb{R}\right)$ ***(септембар 2017.)***

***18.* [10]** Дата је диференцијална једначина $y''+8y'+25y=2\cos x.$

а) Одредити решење $y(x)$ дате диференцијалне једначине за које важи $y(0)=y'(0)=0.$

$$\left(y(x)=-\frac{3}{40}\mathrm{e}^{-4x}\cos(3x)-\frac{13}{120}\mathrm{e}^{-4x}\sin(3x)+\frac{3}{40}\cos x+\frac{1}{40}\sin x\right)$$

б) Одредити константе $a,b>0$ тако да је $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y(x)-a\cos(x-b)\right)=0.$

$$\left(a=\frac{\sqrt{10}}{40},\ b=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+2k\pi,\ k\in\mathbb{N}_0\right)$$

(јул 2017.)

***19.* [8]** Дата је диференцијална једначина $\left(\frac{y^2}{x}-x^3\right)\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y=0$.

а) Одредити опште решење диференцијалне једначине. $\left(y^2=x^2\left(c-x^2\right),\ c\in\mathbb{R}\right)$

б) Одредити оно партикуларно решење диференцијалне једначине које испуњава услов $y\left(\sqrt{3}\right)=3$.

$$\left(y^2=x^2\left(6-x^2\right)\right)$$

(јун 2017.)

20.* [8+2]** ***а) Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'=\frac{1}{1-x^3}y^2-\frac{x^2}{1-x^3}y-\frac{2x}{1-x^3}$, ако је познато да је $y_1=ax^2$ једно њено партикуларно решење и a реална константа (коју треба одредити).

$$\left(a=-1;\ y=\frac{2\left(1-x^3\right)}{2c-x}-x^2,\ c\in\mathbb{R}\right)$$

б) За коју вредност константе c, опште решење постаје добијено партикуларно решење y_1.

(c је бесконачно)

(фебруар 2017.)

***21.* [8]** Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''+y'=7(4+3x)\sqrt[3]{x}$.

$$\left(y(x)=c_1+c_2\mathrm{e}^{-x}+9x^{7/3},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$$

(октобар 2016.)